SISTEMAS DE ECUACIONES

Definición

Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de expresiones algebraicas que se suelen representar de la siguiente forma:

$$ax + by = p$$
$$cx + dy = q$$

donde x e y son las **incógnitas**, *a, b, c* y *d* son los **coeficientes** y *p* y *q* son los **términos independientes**.

Un ejemplo de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas puede ser:

$$x + y = 10$$
$$x - y = 2$$

Cada una de las ecuaciones que componen el sistema, por separado, tendrían infinitas soluciones, ya que hay infinitas parejas de números que sumen 10 y, por otro lado, infinitos pares de números cuya resta sea 2. Sin embargo, al considerar juntas ambas ecuaciones para formar el sistema, estaremos buscando un par de números **(x, y)** que cumplan **a la vez** las dos.

El sistema que hemos propuesto más arriba, podría ser el planteamiento para resolver un problema de este tipo:

Entre lápices y gomas tengo diez piezas de material escolar. Tengo dos lápices más que gomas. ¿Cuántos lápices y cuántas gomas tengo?

Los sistemas de ecuaciones nos ayudan, por tanto, a plantear y resolver problemas parecidos al redactado en el párrafo anterior. Vamos pues a profundizar en el conocimiento y manejo del planteamiento y la resolución de estos problemas utilizando como herramienta los sistemas de ecuaciones.

Soluciones

En el ejemplo anterior, decíamos que buscábamos un par de números que cumplieran las dos ecuaciones del sistema. Pues bien, ese par de números **(x, y)** que satisface ambas ecuaciones de un sistema se llama **solución** del sistema de ecuaciones.

En el caso del problema que utilizamos como ejemplo, la solución vendría dada por el par de números **(6, 4)**, es decir, **x = 6** e **y = 4**. Por tanto, la respuesta del problema planteado sería que tengo **seis** lápices y **cuatro** gomas. Debemos insistir en que 6 y 4 **no** son dos soluciones del sistema, sino que es una solución y ésta está formada por dos números.

¿Quiere decir esto que siempre un sistema de ecuaciones tiene un par de números por solución? Pues no. En realidad, un poco más adelante veremos que un sistema de ecuaciones puede que no tenga solución, e, incluso, puede que tenga infinitas soluciones. Esto dependerá del tipo de sistema de que se trate.

Equivalencia de sistemas

Para poder hablar de sistemas equivalentes, vamos a hacerlo primero de *ecuaciones equivalentes*.

Supongamos que tenemos en una balanza un bote azul y dos verdes que pesan 7 kg. Esto lo podemos expresar como una ecuación de la forma: $a + 2v = 7$. Si en ambos platos de la balanza ponemos una pesa de 3 kg., la balanza seguirá equilibrada. Esta última acción se escribiría en la ecuación así: $a + 2v + 3 = 7 + 3$, es decir, $a + 2v + 3 = 10$. Estas dos ecuaciones tienen la misma solución y se dice que son **ecuaciones equivalentes**.

De la misma forma, si, en vez de sumar la misma cantidad, se multiplican los dos miembros de una ecuación por la misma cantidad, ambas ecuaciones tendrán la misma solución. Es decir:

Si se suma una misma cantidad a los dos miembros de una ecuación o se multiplican ambos por un mismo número distinto de cero, se obtiene una ecuación ***equivalente*** *a la dada.*

Bien, pues una vez definido el concepto de ecuación equivalente, ya podemos definir el de **sistemas equivalentes**:

Dos sistemas de ecuaciones son ***equivalentes*** *si tienen la(s) misma(s) solución(es).*

Aunque ya conozcamos la definición, debemos saber también qué operaciones nos permiten pasar de un sistema de ecuaciones a otro equivalente. Pues bien, son las siguientes:

- Sumar un mismo número (no una incógnita) a ambos miembros de una de las ecuaciones del sistema.
- Multiplicar ambos miembros de una de las ecuaciones del sistema por un número distinto de cero.
- Sumar una ecuación a otra previamente multiplicada por un número cualquiera.
- Despejar una incógnita en una ecuación y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Mediante cualquiera de los métodos relacionados antes se obtiene un sistema equivalente al dado y que, por tanto, tendrá las mismas soluciones que el primitivo.

Tipos de sistemas:

I. Sistema ***compatible***: es el que tiene solución. Dependiendo del número de soluciones puede ser:

   i. Sistema ***compatible determinado*** si tiene una única solución.
   ii. Sistema ***compatible indeterminado*** si tiene múltiples soluciones.

II. Sistema ***incompatible***: es el que no tiene solución.

Resolución de un sistema de ecuaciones

Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es encontrar un par de números **(x, y)** que cumplan **a la vez** las dos ecuaciones.

Método de sustitución

a) Se despeja una de las incógnitas en una cualquiera de las ecuaciones.
b) Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado en una incógnita que resulta de esta sustitución.

c) Una vez calculada la primera incógnita, se calcula la otra en la ecuación despejada obtenida en el primer paso.

Aunque la incógnita que se va a despejar en el primer paso puede ser cualquiera y de cualquier ecuación, es mejor, por la facilidad de los cálculos posteriores, hacer una buena elección de ambas, incógnita y ecuación. Es decir que será más fácil operar después si, por ejemplo, se elige una incógnita en una ecuación en la que "no tenga" coeficiente (es decir, que su coeficiente sea *1*), ya que, en ese caso, podremos evitar el cálculo con fracciones.

Si en el proceso de sustituir la incógnita despejada en el primer paso en la otra ecuación e intentar resolverla nos quedase una expresión del tipo "$0 = 0$", o "$K = K$", siendo K un número cualquiera (por ejemplo, $4 = 4$), tendremos que el sistema es *compatible indeterminado* y tiene infinitas soluciones. Esto se debe a que, en ese caso, una de las ecuaciones es múltiplo de la otra y el sistema quedaría reducido a una sola ecuación, con lo que habría infinitos pares de números (x, y) que la cumplirían. Este tipo de ecuación ($0 = 0$) se llama *ecuación trivial*.

Por otro lado, si la ecuación que nos resultase en el proceso anteriormente explicado fuera de la forma "$K = 0$", siendo K cualquier número distinto de 0, tendremos que el sistema es *incompatible* por lo que, en ese caso, no tiene solución. Esto es claro por la imposibilidad de la expresión aparecida. Este tipo de ecuación ($K = 0$) se llama *ecuación degenerada*. No habría, por tanto, ningún par de números (x, y) que cumplieran ambas ecuaciones del sistema.

Por último, si no nos encontramos, al resolver el sistema, ninguna de los tipos antes descritos de ecuaciones (triviales y degeneradas) y llegamos, al final de su resolución, a un valor para la incógnita x y a otro para la y, estos dos valores formarán el par (x, y) que nos da la solución del sistema y éste tendrá, por tanto una única solución y será un sistema *compatible determinado*.

Ejemplo

Entre Ana y Sergio tienen 600 euros, pero Sergio tiene el doble de euros que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?.

Llamemos ***x*** al número de euros de Ana e ***y*** al de Sergio. Vamos a expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones: Si los dos tienen 600 euros, esto nos proporciona la ecuación $x + y = 600$. Si Sergio tiene el doble de euros que Ana, tendremos que $y = 2x$. Ambas ecuaciones juntas forman el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + y &= 600 \\ y &= 2x \end{aligned}$$

Vamos a resolver el sistema por el método de sustitución, ya que en la 2ª ecuación hay una incógnita, la *y*, ya despejada. Sustituimos el valor de $y = 2x$ en la primera ecuación, con lo que tendremos:

$$x + 2x = 600 \quad \rightarrow \quad 3x = 600 \quad \rightarrow \quad x = 600/3 \quad \rightarrow \quad x = 200$$

Ahora sustituimos $x = 200$ en la ecuación en la que estaba despejada la *y*, con lo que tendremos:

$$y = 2x \quad \rightarrow \quad y = 400$$

Por tanto, la solución al problema planteado es que Ana tiene **200 euros** y Sergio tiene **400 euros**.

Método de igualación

Para resolver un sistema de ecuaciones por este método hay que despejar una incógnita, la misma, en las dos ecuaciones e igualar el resultado de ambos despejes, con lo que se obtiene una ecuación de primer grado. Las fases del proceso son las siguientes:

a) Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
b) Se igualan las expresiones obtenidas y se resuelve la ecuación lineal de una incógnita que resulta.
c) Se calcula el valor de la otra incógnita sustituyendo la ya hallada en una de las ecuaciones despejadas de primer paso.

Vamos a resolver el mismo ejercicio mediante el método de igualación. Recordamos el enunciado del ejercicio, así como el sistema de ecuaciones al que daba lugar su planteamiento:

Entre Ana y Sergio tienen 600 euros, pero Sergio tiene el doble de euros que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?.

$$\begin{aligned} x + y &= 600 \\ y &= 2x \end{aligned}$$

Vamos a resolver el sistema por el método de igualación y ya que en la 2ª ecuación hay una incógnita, la *y*, despejada, vamos a despejar la misma incógnita en la otra ecuación, con lo que tendremos:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x \\ y &= 600 - x \end{aligned}\right\} \rightarrow 2x = 600 - x \rightarrow 2x + x = 600 \rightarrow 3x = 600 \rightarrow x = 600/3 = 200$$

Ahora sustituimos $x = 200$ en una de las ecuaciones en las que estaba despejada la y, con lo que tendremos:

$$y = 2x \rightarrow y = 400$$

Por tanto, la solución al problema planteado es que Ana tiene **200 euros** y Sergio tiene **400 euros**, es decir, el mismo resultado que habíamos obtenido con el método de sustitución.

Método de reducción

Consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por algún(os) número(s) de forma que obtengamos un sistema equivalente al inicial en el que los coeficientes de la x o los de la y sean iguales pero con signo contrario. A continuación se suman las ecuaciones del sistema para obtener una sola ecuación de primer grado con una incógnita. Una vez resuelta esta, hay dos opciones para hallar la otra incógnita: una consiste en volver a aplicar el mismo método (sería la opción más pura de *reducción*); la otra es sustituir la incógnita hallada en una de las ecuaciones del sistema y despejar la otra. Veamos el proceso por fases.

a) Se multiplican las ecuaciones por los números apropiados para que, en una de las incógnitas, los coeficientes queden iguales pero de signo contrario,

b) Se suman ambas ecuaciones del nuevo sistema, equivalente al anterior.

c) Se resuelve la ecuación lineal de una incógnita que resulta.

d) Para este paso hay dos opciones:

   - Se repite el proceso con la otra incógnita.
   - Se sustituye la incógnita ya hallada en una de las ecuaciones del sistema y se despeja la otra.

De nuevo es evidente que todas las aclaraciones hechas en la sección del método de sustitución sobre la discusión del sistema en orden a saber si tiene solución o no y cuántas (en caso de tenerlas), son igualmente válidas en este método.

Veamos de nuevo el mismo ejemplo de los métodos anteriores resuelto por el *método de reducción*:

Entre Ana y Sergio tienen 600 euros, pero Sergio tiene el doble de euros que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?.

Llamemos x al número de euros de Ana e y al de Sergio. Vamos a expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones: Si los dos tienen 600 euros, esto nos proporciona la ecuación $x + y = 600$. Si Sergio tiene el doble de euros que Ana, tendremos que $y = 2x$. Ambas ecuaciones juntas forman el siguiente sistema:

$$x + y = 600$$

$$2x - y = 0$$

Vamos a resolver el sistema por el método de reducción. Para ello, teniendo en cuenta que, en ambas ecuaciones, la y tiene coeficientes opuestos, podemos pasar a sumar directamente ambas y nos quedará:

$$3x = 600 \rightarrow x = 600/3 \rightarrow x = 200$$

A partir de este momento es cuando se pueden aplicar caulquiera de las dos posibilidades descritas más arriba. Como en secciones anteriores ya hemos resuelto esta parte del problema sustituyendo la *x* para despejar la *y*, vamos ahora a utilizar la otra posibilidad, es decir, vamos a terminar el ejercicio con la forma más pura posible de aplicación del método de reducción. Para ello, vamos a volver a aplicar el método para hallar la *y* sin tener que recurrir a ninguna sustitución.

Multiplicamos la primera ecuación por *-2* y obtendremos el siguiente sistema, equivalente al inicial:

$$-2x - 2y = -1200$$

$$2x - y = 0$$

Si sumamos ambas ecuaciones de este sistema tendremos:

$$-3y = -1200 \rightarrow y = 1200/3 \rightarrow y = 400$$

Por tanto, la solución al problema planteado es que Ana tiene **200 euros** y Sergio tiene **400 euros**, es decir, el mismo resultado, evidentemente, que habíamos obtenido con los métodos de sustitución e igualación.

Método gráfico

Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. Cada una de ellas está formada por una pareja de valores ***(x,y)***, que gráficamente representa las coordenadas de un punto en el plano. Al dibujar esos infinitos puntos en un sistema de ejes coordenados, se obtiene una recta.

Considerando que solucionar un sistema de ecuaciones consiste en encontrar la pareja de valores que satisfaga simultáneamente ambas ecuaciones, gráficamente estamos buscando en realidad un punto que pertenezca a las dos rectas. Dicho punto no es otro que el de corte de las mismas.

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método gráfico:

a) Despejamos ***y*** en las dos ecuaciones.

$$x + y = 6 \rightarrow y = 6 - x$$

$$x - y = 2 \rightarrow y = x - 2$$

b) Dando valores a *x*, formamos una tabla de valores para cada una de las dos ecuaciones.

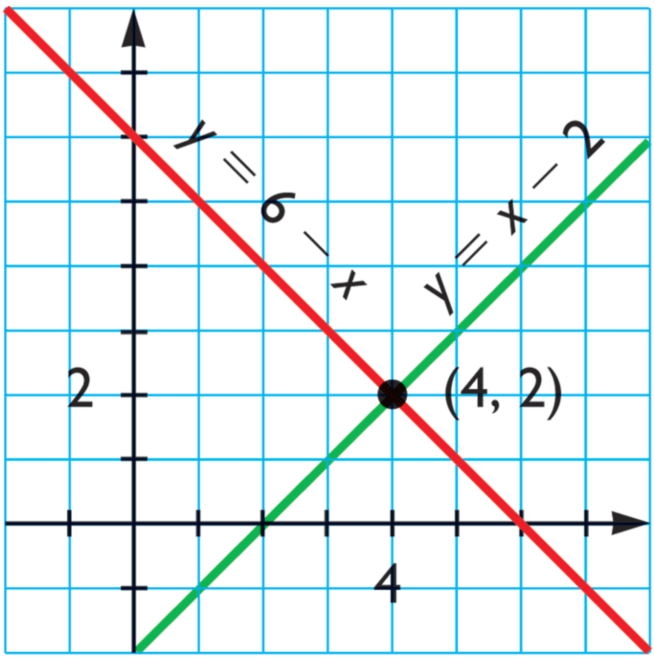
$$y = 6 - x$$

x	0	1	2	3	4
y	6	5	4	3	2

$$y = x - 2$$

x	0	1	2	3	4
y	-2	-1	0	1	2

c) Representamos estos puntos sobre un sistema de ejes.



Puede ocurrir uno de los siguientes casos:

- Si las rectas no se cortan, es decir, son paralelas, el sistema es **incompatible**, no tiene solución.
- Si las rectas se cortan en un punto, el sistema tiene solución única. Decimos que es **compatible determinado**.
- Si las dos rectas coinciden, esto es, son la misma, el sistema tiene infinitas soluciones. Es un sistema **compatible indeterminado**.

En nuestro caso, las rectas se cortan en el punto (4, 2). La solución del sistema es $x = 4$ e $y = 2$.

EJERCICIOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Completa la siguiente tabla:

	Coeficiente de x	**Coeficiente de y**	**Término independiente**
3x + y = 2			
-x + 2y = 4			

2. Escribe algebraicamente mediante una ecuación con dos incógnitas los siguientes enunciados:

a) La suma de dos números es 54.

b) Un bolígrafo cuesta el doble que un lápiz.

c) El perímetro de un rectángulo es 30.

d) Dos números son proporcionales a 2 y 3.

3. Comprueba si los siguientes valores de x e y son solución de las siguientes ecuaciones:

a) $x = 0$, $y = 2$ en la ecuación $3x + 7y = 14$

b) $x = 1$, $y = 3$ en la ecuación $-2x + 5y = 3$

4. Para $x = 1$, halla el valor de y en la ecuación

$2(x + 3) – y = 3$.

5. Para $y = -3$, halla el valor de x en la ecuación

$5\,(x – 1) + 2(y – 2) = 5$

6. Resuelve los siguientes sistemas:

a) Por el método de sustitución:

$x + 3y = 7$

$5x – 2y = -16$

b) Por el método de reducción:

$x + 2y = 5$

$4x + y = 13$

c) Por el método de igualación:

$2x – 5y = -12$

$7x – 2y = -11$

d) Gráficamente:

$x + 4y = 3$

$6x - 5y = -11$

7. Resuelve los siguientes sistemas:

a) Por el método de sustitución:

$2x + 10y = 52$

$$x + \frac{y}{2} = 8$$

b) Por el método de reducción:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4$$

$x + y = 10$

c) Por el método de igualación:

$5x - 5y = -10$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 3$$

d) Gráficamente:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 7$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 2$$

8. En un triángulo isósceles de 14 cm de perímetro, el lado desigual es tres veces menor que cada uno de los otros lados. ¿Cuánto miden los lados?

9. En una tienda de anticuario hay 12 candelabros de 2 y 3 brazos. Si para utilizarlos se necesitan 31 velas, ¿cuántos candelabros hay de cada tipo?

10. Un padre quiere repartir el dinero que lleva en el bolsillo entre sus hijos. Si a cada hijo le da 700 pta. le sobran 200 pta., pero si le da a cada uno 800 pta. le faltan 200 pta. ¿Cuánto dinero lleva en el bolsillo y cuántos hijos tiene?

11. Hoy la edad de un hijo es 1 año menos que 1/3 de la de su madre. Si dentro de 5 años, la edad de la madre será 10 años mayor que el doble de la de su hijo, ¿qué edad tienen?

12. Dos números suman 51. Si el primero lo dividimos entre 3 y el segundo entre 6, los cocientes se diferencian en 1. Halla los números.

13. Un ejercicio realizado en clase consta de 16 cuestiones. El profesor suma 5 puntos por cada respuesta correcta y resta 3 puntos por cada cuestión no contestada o mal contestada. Si un alumno ha obtenido 32 puntos en el ejercicio, ¿cuántas cuestiones ha contestado correctamente?

14. El perímetro de un rectángulo tiene 28 cm. Calcula el área de este rectángulo sabiendo que uno de sus lados tiene cuatro centímetros más que el otro.

15. La razón entre dos números es *2/3*. Si se añaden 20 unidades al más pequeño y 5 al más grande la razón se invierte. ¿De qué números se trata?